B. PRAVDĚPODOBNOST

1. Náhodné pokusy, možné výsledky, pravděpodobnost výsledku

PRAVDĚPODOBNOST – zabývá se matematickými zákonitostmi, které se projevují (při dostatečně velkém počtu pokusů) v náhodných pokusech

NÁHODNÉ POKUSY – pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům (závisí i na náhodě)

– KLASICKÉ: slosování loterie, tahy sportky, hody kostkou nebo mincí, míchání karet

– JINÉ (v praxi důležité): zjišťování účinků nového léku, výnosu nové odrůdy plodiny,...

MOŽNÉ VÝSLEDKY – ozn. ω

– předp., že jsme schopni je předem všechny určit (je jich KONEČNÝ POČET) tak, že se NAVZÁJEM VYLUČUJÍ (nastane-li jeden, nemůže nastat druhý) a JEDEN Z VÝSLEDKŮ NASTANE VŽDY

MNOŽINA MOŽNÝCH VÝSLEDKŮ – zn. Ω

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ m ... počet možných výsledků (konečné číslo)

Příklady

① Zkoumáme, zda při hodu 3 mincemi, které umíme rozlišit, padne rub nebo líc mince. Zapište všechny možné výsledky.

$\Omega = \{\underbrace{LLL, LLR, LRL, RLL, RRL, RLR, LRR, RRR}_{\text{možné výsledky}}\}$ $m = 8$

množina možných výsledků; počet možných výsledků

- výbr. uspoř. trojice (záv. na pořadí) ze 2 prvků L R s opak. => $V'(k,n) = n^k$

=> VARIACE 3členné ze 2 prvků s opak. => $m = V'(3,2) = 2^3 = 8$

② Ve třídě o 28 žácích vyberte losem 4 žáky. Určete počet možných výsledků losování, jestliže

a) závisí i na jejich pořadí

počet čtveřic z 28 bez opak., závisí na pořadí

=> $m = V(4,28) = 28.27.26.25$

b) nezávisí na jejich pořadí

počet čtveřic z 28 bez opak., nezávisí na pořadí

=> $m = K(4,28) = \binom{28}{4} = \frac{28.27.26.25}{4.3.2.1}$

③ V prvním osudí je bílá a červená koule, v druhém bílá, červená a modrá koule. Volíme jedno z osudí a z něj táhneme jednu kouli. Vypište všechny možné výsledky, zajímá-li nás jak číslo zvoleného osudí, tak i barva tažené koule.

$\Omega = \{(1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (2,m)\}$ $m = 5$

PRAVDĚPODOBNOST VÝSLEDKU ω (z množiny všech možných výsledků Ω) – zn. $p(\omega)$

– využijeme-li statistiku (provádíme $n$krát pokus) n... počet pokusů

$$p(\omega) \doteq \frac{n(\omega)}{n}$$

$n(\omega)$... četnost výsledku ω (kolikrát nastal tento výsledek)

$\frac{n(\omega)}{n}$ ... RELATIVNÍ ČETNOST VÝSLEDKU ω v n pokusech

– POKUD JSOU VÝSLEDKY STEJNĚ MOŽNÉ (PRAVDĚPODOBNÉ)

$p(\omega) = \frac{1}{m}$ pro $\forall \omega \in \Omega$ m ... počet možných výsledků množiny Ω

PLATÍ:

$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_m) = 1$ součet pravděpodobností všech výsledků ω je roven 1

$n(\omega_1) + n(\omega_2) + \ldots + n(\omega_m) = n$ součet četností výsledků je roven počtu pokusů

$[n(\omega) \in N_0$ $\frac{n(\omega)}{n} \in Q_0^+$ (racion.)$]$

Příklady

④ Házíme 50krát kostkou

ω	1	2	3	4	5	6
$n(\omega)$	10	6	8	12	0	14
$p(\omega) = \frac{n(\omega)}{n}$	0,20	0,12	0,16	0,24	0,00	0,28

⑤ Hod ideální kostkou, stejně pravděpodobné výsledky

$m = 6$ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{6}$

⑥ Hod mincí (rub, líc), stejně pravděpodobné výsledky

$p(R) = p(L) = \frac{1}{2}$

⑦ Tah 6 čísel (1. výhra) ze 49 ve Sportce (všechny stejně pravděpodobné)

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 0{,}000\,000\,072$

$m = K(6,49) = \binom{49}{6}$
6tice, na poř. nezáleží, bez opak., ze 49 => $K(6,49)$

⑧ V tombole je 100 losů, z nichž bude vylosováno 10 vyhrávajících losů. Jaké jsou možné výsledky losování a jaké mají pravděpodobnosti.

stejně pravděpodobné
$m = K(10,100)$
desetice ze 100
nez. na pořadí

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\binom{100}{10}} \doteq 6 \cdot 10^{-14}$

⑨ Ze statistické ročenky (mezi živě narozenými dětmi v ČR)

– relativní četnost narození chlapců ... 0,516 $= p(\omega_1)$

– relativní četnost narození dívek ... 0,484 $= p(\omega_2)$

$p(\omega_1) + p(\omega_2) = 1$

2. Jevy, pravděpodobnosti jevů

Příklady

① Hod kostkou

množina možných výsledků $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ počet možných výsledků $m(\Omega) = 6$

jev A ... padne sudé číslo $A = \{2,4,6\}$ počet výsledků příznivých jevu A je $m(A) = 3$

jev B ... padne 1 nebo 3 $B = \{1,3\}$ $m(B) = 2$

jev C ... padne číslo menší než 7 $C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ JEV JISTÝ $m(C) = m(\Omega) = 6$

jev D ... padne číslo větší než 6 $D = \emptyset$ JEV NEMOŽNÝ $m(D) = 0$

Kolik je celkem různých jevů – jako podmnožin množiny Ω (množina všech výsledků), tj. $2^m = 2^6$

JEVY – podmnožiny množiny všech možných výsledků, zn. $A, B, C, \ldots$

– popisujeme je zpravidla nějakou vlastností

– pracujeme s nimi jako s podmnožinami

průnik jevů A a B - $A \cap B$, sjednocení jevů A a B – $A \cup B$, doplněk jevu A – A',

jev A je podmnožinou jevu B – $A \subset B$

– pokud Ω má *m* výsledků ⇒ existuje CELKEM 2^m JEVŮ (jako podmnožin množiny Ω)

– VÝSLEDKY PŘÍZNIVÉ JEVU A: prvky množiny A

– JEV JISTÝ: $A = \Omega$ $m(A) = m(\Omega) = 1$ počet výsledků příznivých jevu A je m

NEMOŽNÝ: $A = \emptyset$ $m(A) = 0$ počet výsledků příznivých jevu A je 0

PRAVDĚPODOBNOST JEVU A – zn. $P(A)$

– součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

– pokud výsledky stejně pravděpodobné

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}$$

m(A)... počet výsledků příznivých jevu A

m ... počet všech možných výsledků

– platí

$0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\Omega) = 1$ jistý jev $P(\emptyset) = 0$ nemožný jev

Příklady

② Hod kostkou (viz příklad 1)

A ... padne sudé číslo $p(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B ... padne 1 nebo 3 $p(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C ... padne číslo menší než 7 $p(C) = \frac{m(C)}{m} = 1$ jistý jev

D ... padne číslo větší než 6 $p(D) = \frac{m(D)}{m} = \frac{0}{6} = 0$ nemožný jev

③ Hod dvěma kostkami – bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že padne aspoň jedna 6?

počet možných výsledků $m = m(\Omega) = V'(2,6) = 6^2 = 36$

(11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66)

– vybíráme dvojice ze 6 čísel, záleží na pořadí, s opak. ⇒ dvojčlenné variace ze 6 prvků s opakováním

jev A ... padne aspoň 1 šestka

$A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

$m(A) = 11$

pravděpodobnost jevu A

$p(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{11}{36}$

④ Jaká je pravděpodobnost, že

a) při hodu jednou mincí padne líc

A... padne líc $\quad \Omega = \{L, R\}$ $\quad P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{1}{2}$

$m(A) = 1 \quad m = m(\Omega) = 2$

b) při dvojnásobném hodu mincí aspoň jednou padne líc

A... padne aspoň 1 líc $\quad A = \{LL, LR, RL\}$ $\quad m(A) = 3$

$\Omega = \{LL, LR, RL, RR\}$ $\quad m = m(\Omega) = 4$ $\quad P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{3}{4}$

[Pozor! d'Alembert uvažoval pouze 3 možnosti Ω={LL, LR, RR} ⇒ P(A) = 2/3 CHYBNĚ, protože LR není stejně pravděpodobné s LL, RR ⇒ nelze použít vztah pro stejně pravděpodobné výsledky]

c) při hodu 4 nerozlišitelnými mincemi padne líc alespoň na 3 mincích

$m = m(\Omega) = V'(4,2) = 2^4 = 16$

čtveřice ze 2 (L,R), zál. na poř., opak.

A... líc aspoň na 3 ze 4

$A = \{LLLR, LLRL, LRLL, RLLL, LLLL\}$ $\quad m(A) = 5$

$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{5}{16}$

⑤ Jaká je pravděpodobnost ve Sportce (49 čísel, 6 vsázíme, 6 losováno)

a) výhry v V. pořadí (3 ze 6 vylosovaných se shodují se vsazenými)

$P(A) = \frac{m(A)}{m}$ $\quad m = K(6,49) = \binom{49}{6}$

$P(A) = \frac{K(3,6) \cdot K(3,43)}{K(6,49)}$ $\quad m(A) = K(3,6) \cdot K(3,43)$

vsázím 3 ze 6 vylosor. a 3 z (49-6) nevylos.

$P(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{3}}$

b) že neuhádneme ani jedno ze 6 tažených čísel

$P(B) = \frac{K(6,43)}{K(6,49)} = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \doteq 0,436 \; (= 43,6\,\%)$

c) výhry v 1. pořadí

$P(C) = \frac{K(6,6)}{K(6,49)} = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = 0,0000000715$